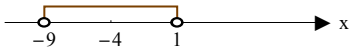
Matura 2013 Poziom podstawowy.Zadania zamknięte.

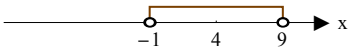
www.matematykawszkole.com.pl

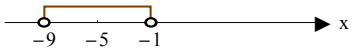
2015 –01 –26 08:41:39

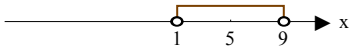
Zadanie 1. (1 pkt)

Wskaż rysunek, na którym zaznaczony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|x+4|<5$.

A. 

B. 

C. 

D. 

Zadanie 2. (1 pkt)

Liczby **a** i **b** są dodatnie oraz 12% liczby **a** jest równe 15% liczby **b**. Stąd wynika, że **a** jest równe:

A. 103% liczby b B. 125% liczby b C. 150% liczby b D. 153% liczby b

Zadanie 3. (1 pkt)

Liczba $\log 100 - \log_2 8$ jest równa:

A. −2 B. −1 C. 0 D. 1

Zadanie 4. (1 pkt)

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x+3y=3 \\ 8x-6y=48 \end{cases}$ jest para liczb:

A. x=−3 i y=4 B. x=−3 i y=6 C. x=3 i y=−4 D. x=9 i y=4

Zadanie 5. (1 pkt)

Punkt $A=(0,1)$ leży na wykresie funkcji liniowej $f(x)=(m-2)x+m-3$. Stąd wynika, że:

A. m=1 B. m=2 C. m=3 D. m=4

Zadanie 6. (1 pkt)

Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y=-3(x-2)^2+4$ jest punkt o współrzędnych:

A. (−2,−4) B. (−2,4) C. (2,−4) D. (2,4)

Zadanie 7. (1 pkt)

Dla każdej liczby rzeczywistej **x**, wyrażenie $4x^2-12x+9$ jest równe:

A. (4x+3)(x+3) B. (2x−3)(2x+3) C. (2x−3)(2x−3) D. (x−3)(4x−3)

Zadanie 8. (1 pkt)

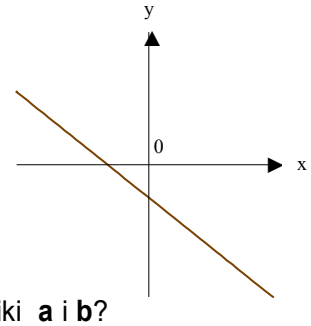
Prosta o równaniu $y = \frac{2}{m}x + 1$ jest

prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{2}x - 1$. Stąd wynika, że:

A. m=−3 B. $m=\frac{2}{3}$ C. $m=\frac{3}{2}$ D. m=3

Zadanie 9. (1 pkt)

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu pewnej funkcji liniowej $y = ax + b$.



Jakie znaki mają współczynniki **a** i **b**?

A. a<0 i b<0 B. a<0 i b>0 C. a>0 i b<0 D. a>0 i b>0

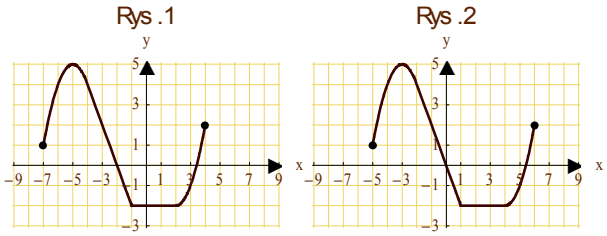
Zadanie 10. (1 pkt)

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{2} \le \frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$ jest:

A. −2 B. −1 C. 0 D. 1

Zadanie 11. (1 pkt)

Na rysunku 1 przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$ określonej dla $x \in \langle -7, 4 \rangle$.



Rysunek 2 przedstawia wykres funkcji:

A. y=f(x+2) B. y=f(x)−2 C. y=f(x−2) D. y=f(x)+2

Zadanie 12. (1 pkt)

Ciąg $(27, 18, x + 5)$ jest geometryczny. Wtedy:

A. x=4 B. x=5 C. x=7 D. x=9

Zadanie 13. (1 pkt)

Ciąg (a_n) określony dla $n \ge 1$ jest arytmetyczny

oraz $a_3 = 10$ i $a_4 = 14$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

A. $a_1=-2$ B. $a_1=2$ C. $a_1=6$ D. $a_1=12$

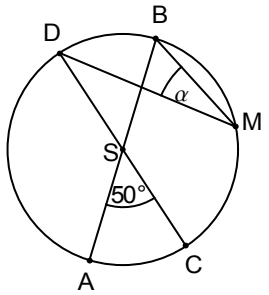
Zadanie 14. (1 pkt)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wartość wyrażenia $\cos^2\alpha - 2$ jest równa:

A. $-\frac{7}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 15. (1 pkt)

Średnica **AB** i **CD** okręgu o środku **S** przecinają się pod kątem **50 °** (tak jak na rysunku).



Miara kąta α jest równa:

A. 25° B. 30° C. 40° D. 50°

Zadanie 16. (1 pkt)

Liczba rzeczywistych rozwiązań równania $(x+1)(x+2)(x^2+3)=0$ jest równa:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Zadanie 17. (1 pkt)

Punkty $A=(-1, 2)$ i $B=(5, -2)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami rombu **ABCD**. Obwód tego rombu jest równy:

A. $\sqrt{13}$ B. 13 C. 676 D. $8\sqrt{13}$

Zadanie 18. (1 pkt)

Punkt $S=(-4, 7)$ jest środkiem odcinka **PQ**, gdzie $Q=(17, 12)$. Zatem punkt **P** ma współrzędne:

A. P=(2,−25) B. P=(38,17) C. P=(−25,2) D. P=(−12,4)

Zadanie 19. (1 pkt)

Odległość między środkami okręgu o równaniu $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ oraz $x^2+y^2=10$ jest równa:

A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{10}-3$ C. 3 D. 5

Zadanie 20. (1 pkt)

Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o 10 większa od liczby wszystkich jego ścian bocznych. Stąd wynika, że podstawą tego graniastosłupa jest:

A. czworokąt B. pięciokąt C. sześciokąt D. dziesięciokąt

Zadanie 21. (1 pkt)

Pole powierzchni bocznej stożka o wysokości 4 i promieniu podstawy 3 jest równe:

A. 9π B. 12π C. 15π D. 16π

Zadanie 22. (1 pkt)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech **p** oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 5. Wtedy:

A. $p=\frac{1}{36}$ B. $p=\frac{1}{18}$ C. $p=\frac{1}{12}$ D. $p=\frac{1}{9}$

Zadanie 23. (1 pkt)

Liczba $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ jest równa:

A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. 4 D. $\sqrt{10}-\sqrt{6}$

Zadanie 24. (1 pkt)

Mediana uporządkowanego, niemalejącego zestawu sześciu liczb: **1**,**2**,**3**,**x**,**5**,**8** jest równa **4**. Wtedy:

A. x=2 B. x=3 C. x=4 D. x=5

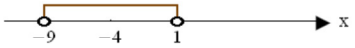
Zadanie 25. (1 pkt)

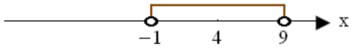
Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości **7** jest równa $\mathbf{28\sqrt{3}}$. Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa:

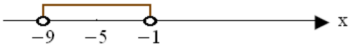
A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

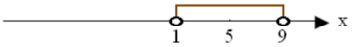
Zadanie 1

Wskaż rysunek, na którym zaznaczony jest zbiór
wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|x+4|<5$.

A: 

B: 

C: 

D: 

Rozwiązanie

Aby odpowiedzieć na postawione pytanie, należy
skorzystać z jednej z własności wartości bezwzględnej, która mówi że:

$$|a|<b \iff a<b \wedge a>-b$$

Nierówność, która jest zilustrowana na osi liczbowej ma postać:

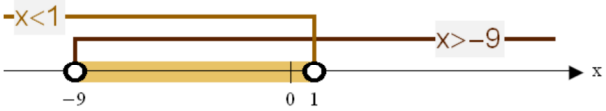
$$|x+4|<5$$

Z podanej własności wartości bezwzględnej mamy:

$$x+4<5 \text{ i } x+4>-5$$

W pierwszej i drugiej nierówności odejmując
4 od obu stron, otrzymamy:

$$x<1 \text{ i } x>-9$$



czyli

$$x\in(-9,1)$$

Prawidłowa jest odpowiedź *A*.

Zadanie 2

Liczby **a** i **b** są dodatnie oraz 12% liczby
a jest równe 15% liczby **b**. Stąd wynika, że **a** jest równe:
A:103% liczby b
B:125% liczby b
C:150% liczby b
D:153% liczby b

Rozwiązanie

Aby odpowiedzieć na postawione pytanie należy zapisać w formie wyrażenia odpowiedni procent liczby **a** i **b** oraz przyrównać otrzymane wyrażenia.

Otrzymany w kolejnym kroku stosunek $\frac{a}{b}$ należy wyrazić w procentach.

Wiemy, że 12 % z liczby **a** to $\frac{12}{100}a$,
natomiast 15 % z liczby **b** to $\frac{15}{100}b$.
Mamy zatem proste równanie:

$$\frac{12}{100}a=\frac{15}{100}b$$

Mnożąc każdą ze stron równania przez 100 i dziejąc przez 12, otrzymamy:

$$a=\frac{15}{12}b$$

czyli

$$a=\frac{5}{4}b$$

Aby łatwo było przedstawić wynik w procentach, należy rozszerzyć ułamek do mianownika o wartości 100. Mnożąc licznik i mianownik ułamka po prawej stronie równości przez 25 otrzymamy:

$$a=\frac{125}{100}b$$

Czyli liczba **a** jest równa 125 % liczby **b**.

Prawidłowa jest odpowiedź *B*.

Zadanie 3

Liczba **log100 – $\log_2$ 8** jest równa:
A:–2, B:–1, C:0, D:1

Rozwiązanie

Na początku przypomnijmy , że zapis log100 oznacza logarytm przy podstawie 10 z liczby 100.

Zadanie to można łatwo rozwiązać , jeśli wyliczyć wartość
każdego z logarytmów . Można je wyliczyć korzystając z definicji logarytmu :

$\log_a b = c \iff b=a^c,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0$

Aby było jeszcze prościej można wykorzystać wynikający z definicji logarytmu wzór :

$\log_a a^c = c$

Wystarczy liczby **100** i **8** przedstawić
jako potęgi liczby równej odpowiedniej podstawie logarytmu .

Wiemy , że jeżeli $\log_a a^n = n$, zatem

$\log 100 = \log 10^2 = 2$

$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

Różnica tych logarytmów wynosi: –1.

Prawidłowa jest odpowiedź *B*.

Zadanie 4

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x+3y=3 \\ 8x-6y=48 \end{cases}$ jest para liczb:

A:x=–3 i y=4
B:x=–3 i y=6
C:x=3 i y=–4
D:x=9 i y=4

Rozwiązanie

Podstawiając liczby **x** i **y** do układu równań w miejsce niewiadomych można sprawdzić, czy para liczb spełnia oba równania.

Jest to najprostsza metoda udzielenia odpowiedzi.
Sprawdźmy zatem kolejne pary liczb.

$$\begin{cases} 5\cdot(-3)+3\cdot 4=3 \\ 8\cdot(-3)-6\cdot 4=48 \end{cases}$$

Równości nie są prawdziwe.

$$\begin{cases} 5\cdot(-3)+3\cdot 6=3 \\ 8\cdot(-3)-6\cdot 6=48 \end{cases}$$

Równości nie są prawdziwe.

$$\begin{cases} 5\cdot 3+3\cdot(-4)=3 \\ 8\cdot 3-6\cdot(-4)=48 \end{cases}$$

Równości są prawdziwe.

$$\begin{cases} 5\cdot 9+3\cdot 4=3 \\ 8\cdot 9-6\cdot 4=48 \end{cases}$$

Równości nie są prawdziwe.

Powyżej nie rozwiązywaliśmy układu równań, ale sprawdzaliśmy czy dana para liczb spełnia ten układ. Poniżej pokazany jest jeden ze sposobów rozwiązania układu równań. Zastosujemy metodę eliminacji niewiadomej przez dodawanie równań stronami.

Pomnożymy w tym celu pierwsze równanie przez 2, a następnie dodamy równania stronami.
Po pomnożeniu otrzymamy:

$$\begin{cases} 10\cdot x+6\cdot y=6 \\ 8\cdot x-6\cdot y=48 \end{cases}$$

Po dokonaniu sumowania stronami otrzymamy:

$$18x=54$$

stąd obliczymy niewiadomą **x**

$$x=3$$

Podstawiając obliczoną wartość do pierwszego równania, otrzymamy:

$5 \cdot 3 + 3 \cdot y = 3$

$3 \cdot y = -12$

Obliczona stąd wartość **y** wyniesie:

$y = -4$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb:

$(x,y) = (3,-4)$

Prawidłowa jest odpowiedź *C*.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31-564 Kraków, al. Pokoju 29B/22-24

Zadanie 5

Punkt $A = (0, 1)$ leży na wykresie
funkcji liniowej $f(x) = (m - 2)x + m - 3$. Stąd wynika, że:
A:m=1, B:m=2, C:m=3, D:m=4

Rozwiązanie

Wiemy, że jeżeli punkt (x_0, y_0) należy do wykresu funkcji $y = f(x)$, to jego współrzędne podstawione w miejsce **x** i **y** spełniają równanie, czyli $y_0=f(x_0)$.

Należy podstawić współrzędne punktu do równania prostej i z otrzymanego równania wyliczyć wartość parametru **m**.

Podstawiając współrzędne punktu do wzoru funkcji otrzymamy:

$$1=(m-2)\cdot 0+m-3$$

czyli łatwo wyliczymy, że

$$m=4$$

Prawidłowa jest odpowiedź *D*.

Zadanie 6

Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = -3(x-2)^2 + 4$ jest punkt o współrzędnych:
A:(–2,–4), B:(–2,4), C:(2,–4), D:(2,4)

Rozwiązanie

Równanie funkcji kwadratowej podane jest w postaci kanonicznej, w której współrzędne wierzchołka paraboli występują wprost w równaniu paraboli.

Jeśli wierzchołek paraboli ma współrzędne (x_W, y_W), to równanie tej paraboli ma postać:

$$y=a(x-x_W)^2+y_W$$

gdzie **a** jest liczbą rzeczywistą różną od 0.

Równanie paraboli ma postać:

$$y=-3(x-2)+4$$

Stąd otrzymamy wartości współrzędnych wierzchołka paraboli:

$$x_W=2$$

$$y_W=4$$

Prawidłowa jest odpowiedź *D*.

Zadanie 7

Dla każdej liczby rzeczywistej **x**, wyrażenie $\mathbf{4x^2 - 12x + 9}$ jest równe:

A:$(4x+3)(x+3)$

B:$(2x-3)(2x+3)$

C:$(2x-3)(2x-3)$

D:$(x-3)(4x-3)$

Rozwiązanie

W tym zadaniu możemy rozłożyć na czynniki wielomian pierwotny :

$4x^2-12x+9$

lub wymnożyć wielomiany odpowiedzi ,
aby sprawdzić , który z nich jest równy podanemu wielomianowi .

Sposób 1

Dokonamy mnożenia jednomianów w każdej z propozycji
odpowiedzi , aby stwierdzić , który iloczyn jest równy wielomianowi pierwotnemu .

Odpowiedź A

$(4x+3)\cdot(x+3)=4x^2+12x+3x+9=4x^2+15x+9$

Wniosek: Ta odpowiedź jest błędna.

Odpowiedź B

$(2x-3)\cdot(2x+3)=4x^2+6x-6x-9=4x^2-9$

Wniosek: Ta odpowiedź też jest błędna.

Odpowiedź C

$(2x-3)\cdot(2x-3)=4x^2-6x-6x+9=4x^2-12x+9$

Wniosek: To jest dobra odpowiedź

Odpowiedź D

$(x-3)\cdot(4x-3)=4x^2-3x-12x+9=4x^2-15x+9$

Wniosek: To jest też zła odpowiedź

Sposób 2

Powyższe rozwiązanie bazowało na przekształcaniu wielomianów odpowiedzi . Aby rozłożyć wielomian pierwotny na czynniki należy skorzystać z zapisu trójmianu kwadratowego w postaci iloczynowej .

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu .
Aby je wyznaczyć należy wyliczyć wartość wyróżnika Δ.

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=(-12)^2-4\cdot4\cdot9=0$$

Wyróżnik Δ ma wartość zero, więc istnieje jeden pierwiastek podwójny , który wyraża się wzorem :

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

czyli

$$x_0=\frac{3}{2}$$

Wielomian można zapisać w uproszczonej postaci iloczynowej :

$$4x^2-12x+9=4\cdot(x-\frac{3}{2})^2$$

lub po przekształceniu

$$4x^2-12x+9=(2\cdot(x-\frac{3}{2}))^2$$

$$4x^2-12x+9=(2x-3)^2=(2x-3)(2x-3)$$

Spostrzegawczy maturzysta zastosuje do wielomianu pierwotnego wprost wzór na kwadrat różnicy $(2x-3)^2$.

Prawidłowa jest odpowiedź *C*.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31 –564 Kraków ,al.Pokoju 29 B/22 –24

Zadanie 8

Prosta o równaniu $y = \frac{2}{m}x + 1$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{2}x - 1$. Stąd wynika, że:

A:m=−3, B:m=$\frac{2}{3}$, C:m=$\frac{3}{2}$, D:m=3

Rozwiązanie

Należy założyć, że:

$m \neq 0$

ponieważ mianownik ułamka musi być różny od zera.

Równania obu prostych podane są w postaci kierunkowej $y = ax + b$. Takie proste są prostopadłe jeśli współczynniki kierunkowe a_1 i a_2 spełniają określony warunek .

Jeżeli proste o równaniach :

$y=a_1x+b_1$

i

$y=a_2x+b_2$

są prostopadłe , to

$$a_1=-\frac{1}{a_2}$$

Zatem dla danych z zadania otrzymamy :

$$a_1=\frac{2}{m}$$

$$a_2=-\frac{3}{2}$$

czyli

$$-\frac{1}{a_2}=-\frac{1}{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

Równanie ma postać: $\frac{2}{m}=\frac{2}{3}$

stąd, po pomnożeniu obu stron równania przez 3m, a następnie podzieleniu przez 2, otrzymamy :

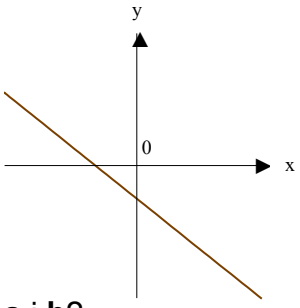
$m=3$

Prawidłowa jest odpowiedź *D*.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31 – 564 Kraków, al. Pokoju 29 B/22 – 24

Zadanie 9

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu pewnej funkcji liniowej $y = ax + b$.



Jakie znaki mają współczynniki **a** i **b**?

A:a<0 i b<0

B:a<0 i b>0

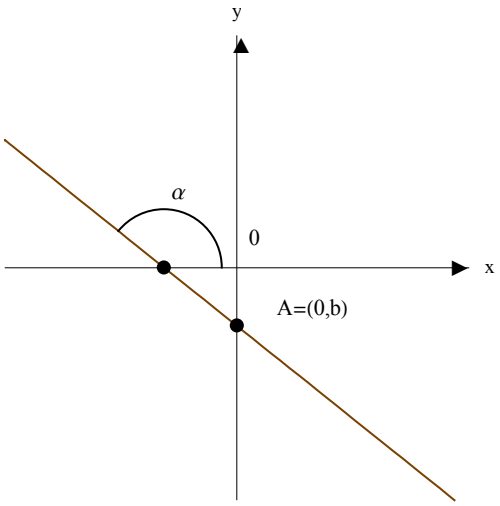
C:a>0 i b<0

D:a>0 i b>0

Rozwiązanie

Współczynniki **a** i **b** równania prostej w postaci kierunkowej mają prostą interpretację na wykresie tej prostej. Współczynnik **a**, nazywany współczynnikiem kierunkowym prostej, związany jest z kątem jej nachylenia do osi **x**. Współczynnik **b** wiąże się ze współrzędną punktu przecięcia wykresu prostej z osią **y**.

Na rysunku pokazana została interpretacja parametrów **a** i **b** równania prostej w postaci kierunkowej .



Z wykresu widzimy, że:

b < 0.

Współczynnik **a** związany jest z kątem α.

$a = \mathrm{tg}\,\alpha$

Dla prostej pokazanej na rysunku $\alpha > 90°$, czyli

$a < 0$.

Prawidłowa jest odpowiedź *A*.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31 – 564 Kraków, al. Pokoju 29 B/22 – 24

Zadanie 10

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{2} \leq \frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$ jest:

A:–2, B:–1, C:0, D:1

Rozwiązanie

W zadaniu wystarczy rozwiązać prostą nierówność liniową. Następnie z jej zbioru rozwiązań wybrać tylko liczby całkowite i wskazać najmniejszą z tych liczb.

Aby wybrać prawidłową odpowiedź, konieczne jest rozwiązanie nierówności. Pomnożymy obie strony przez 12

$$\frac{x}{2}\cdot 12 \leq \frac{2x}{3}\cdot 12 + \frac{1}{4}\cdot 12$$

$$6x \leq 8x+3$$

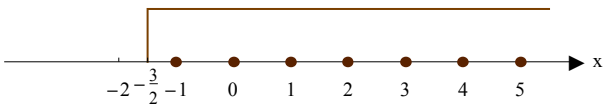
po odjęciu **8 *x*** od obu stron nierówności, otrzymamy

$$-2x \leq 3$$

a po podzieleniu przez **–2**

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

Jeśli wybierzemy z tego zbioru rozwiązań tylko liczby całkowite, to muszą one być **większe lub równe – 1**.



Zatem najmniejszą liczbą całkowita spełniającą warunki zadania jest liczba x_{min}:

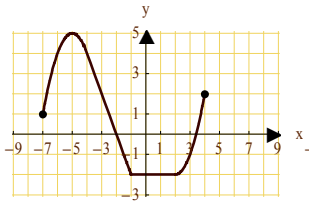
$$x_{min} = -1$$

Prawidłowa jest odpowiedź *B*.

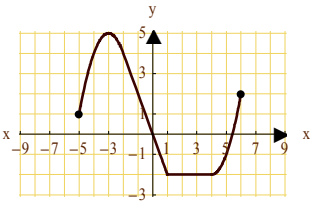
Zadanie 11

Na rysunku 1 przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$ określonej dla $x \in \langle -7,4 \rangle$.

Rys .1



Rys .2



Rysunek 2 przedstawia wykres funkcji :

A:y=f(x+2)

B:y=f(x)–2

C:y=f(x–2)

D:y=f(x)+2

Rozwiązanie

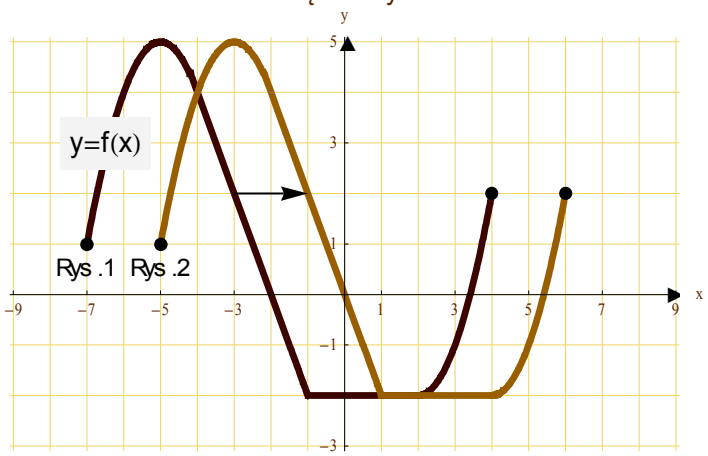
Zadanie dotyczy przesunięcia wykresu funkcji. Należy podać wzór funkcji przesuniętej (rysunek 2) w oparciu o wzór funkcji oryginalnej (rysunek 1) i parametry definiujące przesunięcie . Należy określić w jaki sposób wykres funkcji na rysunku 2 jest przesunięty względem wykresu oryginalnego z rysunku 1.

Jeżeli funkcja oryginalna ma postać $y = f(x)$ i liczby **a** i **b** są dodatnie , to funkcja przesunięta o **b** jednostek w górę wzdłuż osi **y** i **a** jednostek w prawo wzdłuż osi **x**, będzie mieć postać:

f(x–a)+b

Ogólnie możemy powiedzieć , że przesuwamy wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $[a, b]$, dla dowolnych liczb rzeczywistych **a** i **b**.

Przesunięcie wykresów



Z rysunków widzimy, że wykres na rysunku 2 jest wykresem z rysunku 1 przesuniętym o **dwie** jednostki

w prawo .

Kolejne odpowiedzi należy interpretować następująco :

Odpowiedź A

$y=f(x+2)$

Wykres $f(x)$ przesunięty o 2 jednostki w lewo.

Odpowiedź B

$y=f(x)-2$

Wykres $f(x)$ przesunięty o 2 jednostki w dół.

Odpowiedź C

$y=f(x-2)$

Wykres $f(x)$ przesunięty o 2 jednostki w prawo.

Odpowiedź D

$y=f(x)+2$

Wykres $f(x)$ przesunięty o 2 jednostki w górę.

Prawidłowa jest odpowiedź *C*.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31 –564 Kraków ,al.Pokoju 29 B/22 –24

Zadanie 12

Ciąg $(\mathbf{27, 18, x+5})$ jest geometryczny. Wtedy:
A:x=4, B:x=5, C:x=7, D:x=9

Rozwiązanie

Jeżeli liczby a_1, a_2, a_3 stanowią ciąg geometryczny ,
to iloraz wyrazu danego i bezpośrednio go poprzedzającego jest stały.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$$

Na podstawie tej proporcji należy ułożyć równanie , które będzie mieć jedną niewiadomą **x**.

Zatem biorąc pod uwagę , że

$a_1=27$

$a_2=18$

$a_3=x+5$

proporcję tę możemy zapisać w postaci:

$$\frac{18}{27}=\frac{x+5}{18}$$

Po skróceniu i przekształceniu wystarczy rozwiązać równanie :

$3(x+5)=2\cdot 18$

gdzie szukana wartość, to

$x=7$

Prawidłowa jest odpowiedź *C*.

Zadanie 13

Ciąg (a_n) określony dla $n \geq 1$ jest arytmetyczny
oraz $\boldsymbol{a_3 = 10}$ i $\boldsymbol{a_4 = 14}$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:
A: $a_1=-2$, B: $a_1=2$, C: $a_1=6$, D: $a_1=12$

Rozwiązanie

Ciąg $(\boldsymbol{a_n})$ jest arytmetyczny więc

$$a_{n+1}-a_n=r$$

gdzie, **r** jest stałe i niezależne od **n**.

Mając dane wartości $\boldsymbol{a_3}$ i $\boldsymbol{a_4}$ obliczymy **r**. Gdy będzie już znana różnica ciągu **r** wyraz $\boldsymbol{a_1}$ można obliczyć licząc w pierwszej kolejności $\boldsymbol{a_2}$.

$$r=a_4-a_3=4$$

Możemy teraz zapisać, że

$$a_2=a_3-r=6$$

oraz

$$a_1=a_2-r$$

czyli

$$a_1=2$$

Prawidłowa jest odpowiedź *B*.

Zadanie 14

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wartość wyrażenia $\cos^2\alpha - 2$ jest równa:

A: $-\frac{7}{4}$, B: $-\frac{1}{4}$, C: $\frac{1}{2}$, D: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rozwiązanie

Biorąc pod uwagę, że dla każdego kąta α, zachodzi:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

zastosujemy tę zależność do wyliczenia wartości:

$$\cos^2\alpha$$

Otrzymamy:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

czyli

$$\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

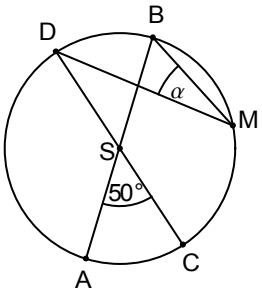
zatem

$$\cos^2\alpha-2=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}$$

Prawidłowa jest odpowiedź *A*.

Zadanie 15

Średnica **AB** i **CD** okręgu o środku **S** przecinają się pod kątem **50 °** (tak jak na rysunku).



Miara kąta α jest równa:
A:25°, B:30°, C:40°, D:50°

Rozwiązanie

Aby rozwiązać to zadanie należy rozpatrzeć zależności pomiedzy kątami:

∡ASC i ∡DSB

oraz

∡DSB i ∡DMB

Kąty ∡ASC i ∡DSB są kątami wierzchołkowymi i miara kąta ∡ASC wynosi 50°, zatem:

miara kąta ∡DSB wynosi: 50°

Kąty ∡DSB i ∡DMB, to odpowiednio kąt środkowy i kąt wpisany, oparte na tym samym łuku DB. Kąt wpisany jest w takiej sytuacji dwa razy mniejszy od kąta środkowego, czyli:

miara kąta ∡DMB wynosi: 25°

Prawidłowa jest odpowiedź *A*.

Zadanie 16

Liczba rzeczywistych rozwiązań równania $(x+1)(x+2)(x^2+3)=0$ jest równa:

A:0, B:1, C:2, D:4

Rozwiązanie

Iloczyn jest równy zero, gdy zerem jest jeden z czynników. Należy sprawdzić, czy każdy z czynników przyrównany do zera ma rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych i jeśli tak, to ile ich ma.

Wielomian będzie miał wartość zero, gdy

$x+1=0$

lub

$x+2=0$

lub

$x^2+3=0$

Tylko dwa pierwsze równania mają rozwiązania rzeczywiste. Równanie trzecie nie ma rozwiązań rzeczywistych. Kwadrat każdej liczby rzeczywistej **x** jest większy lub równy zero, zatem powiększony o 3 nie może być równy zero.

Każde z pierwszych dwóch równań ma po jednym pierwiastku, zatem równanie pierwotne ma dwa pierwiastki rzeczywiste.

Prawidłowa jest odpowiedź *C*.

Zadanie 17

Punkty $A = (-1, 2)$ i $B = (5, -2)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami rombu **ABCD** . Obwód tego rombu jest równy:

A: $\sqrt{13}$, B:13, C:676, D: $8\sqrt{13}$

Rozwiązanie

Jeśli punkty **A** i **B** są sąsiednimi wierzchołkami rombu , to długość odcinka **AB** jest długością jego boku .

Jeżeli oznaczymy przez **O** obwód rombu , to:

$$O=4\cdot|AB|$$

Jeżeli punkt **A** ma współrzędne (x_A,y_A), a punkt **B** (x_B,y_B), to długość odcinka **AB** wyraża się wzorem :

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Podstawiając współrzędne punktów **A** i **B** otrzymamy :

$$|AB|=\sqrt{(5-(-1))^2+(-2-2)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

czyli obwód rombu wyniesie

$$O=4\cdot 2\sqrt{13}=8\sqrt{13}$$

Prawidłowa jest odpowiedź *D*.

Zadanie 18

Punkt $S = (-4, 7)$ jest środkiem odcinka
PQ, gdzie $Q = (17, 12)$. Zatem punkt **P** ma współrzędne:

A:P=(2,–25)

B:P=(38,17)

C:P=(–25,2)

D:P=(–12,4)

Rozwiązanie

Jeżeli punkt **S** jest środkiem odcinka, to jego współrzędne **x** i **y** są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych jego końców. Stąd, mając współrzędne środka odcinka i jednego z jego końców, można łatwo wyliczyć współrzędne drugiego końca.

Jeśli punkty **P** i **Q** są końcami odcinka i mają współrzędne :

$$P=(x_P,y_P),\ Q=(x_Q,y_Q)$$

to współrzędne x_S, y_S punktu **S** będącego środkiem odcinka, wyrażają się wzorami

$$x_S=\frac{x_P+x_Q}{2}$$

$$y_S=\frac{y_P+y_Q}{2}$$

czyli podstawiając dane z zadania, otrzymamy

$$\blacksquare=\frac{x_P+\blacksquare}{2} \Rightarrow -4=\frac{x_P+17}{2}$$

$$\blacksquare=\frac{x_P+\blacksquare}{2} \Rightarrow 7=\frac{y_P+12}{2}$$

Z równań tych wyznaczamy współrzędne punktu P

$$x_P=-25$$

$$y_P=2$$

Prawidłowa jest odpowiedź *C*.

Zadanie 19

Odległość między środkami okręgu o równaniu $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ oraz $x^2+y^2=10$ jest równa:

A: $\sqrt{5}$, B: $\sqrt{10}-3$, C:3, D:5

Rozwiązanie

Jeśli okrąg ma równanie :

$$(x-x_S)^2+(y-y_S)^2=r^2$$

to x_S i y_S są współrzędnymi jego środka

a **r** jest promieniem okręgu .

Po wyznaczeniu współrzędnych środków okręgów z wyznaczeniem ich odległości nie powinno być problemów . Na wszelki wypadek poniżej jest podany wzór na obliczanie odległości dwóch punktów **A** i **B**, z których pierwszy ma współrzędne (x_A, y_A) a drugi (x_B, y_B).

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Zatem współrzędne środka S_1 pierwszego okręgu wynoszą:

$$S_1=(-1,2)$$

Okrąg drugi ma środek w punkcie S_2 o współrzędnych :

$$S_2=(0,0)$$

Odległość tych punktów wynosi

$$|S_1S_2|=\sqrt{(0-(-1))^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$$

Prawidłowa jest odpowiedź *A*.

Zadanie 20

Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o 10 większa od liczby wszystkich jego ścian bocznych. Stąd wynika, że podstawą tego graniastosłupa jest:

A:czworokąt

B:pięciokąt

C:sześciokąt

D:dziesięciokąt

Rozwiązanie

Każdy graniastosłup , który w podstawie ma wielokąt o **n** kątach, posiada dokładnie określoną liczbę krawędzi i liczbę ścian bocznych.

n–kąt posiada :

Liczba krawędzi: $L_K=3\cdot n$

Liczba ścian bocznych: $L_B=n$

Z treści zadania wynika, że:

$L_B+10=L_K$

Otrzymamy równanie :

$n+10=3\cdot n$

Zatem łatwo można obliczyć, że:

$n=5$

Podstawą graniastosłupa jest **pięciokąt** .

Prawidłowa jest odpowiedź *B*.

Zadanie 21

Pole powierzchni bocznej stożka o wysokości 4 i promieniu podstawy 3 jest równe:
A:9π, B:12π, C:15π, D:16π

Rozwiązanie

Pole powierzchni bocznej stożka wyraża się określonym wzorem, który powinien być znany maturzyście. Jeśli nie pamiętasz, to kliknij poniżej na pole wyboru.

$P_b=\pi\cdot r\cdot l$

gdzie:

r oznacza promień podstawy stożka

l jest długością jego tworzącej,

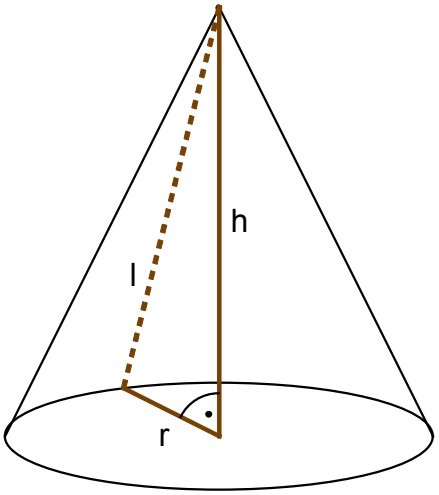
a $\boldsymbol{P_b}$ jest polem powierzchni bocznej.

Należy wyznaczyć **r** i **l** z treści zadania i rozwiązanie jest gotowe. Będzie potrzebne jeszcze twierdzenie Pitagorasa.

Wartości **r** i **h** są podane wprost w zadaniu i wynoszą:

$r=3$

$h=4$



Na rysunku zaznaczony został trójkąt prostokątny, którego przyprostokątnymi są promień podstawy **r** i wysokość stożka **h**. Przeciwprostokątna to tworząca stożka **l**, której długość należy obliczyć.

Długość tworzącej stożka wyliczymy z zależności:

$l=\sqrt{r^2+h^2}$

$$l=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

zatem pole powierzchni bocznej stożka wyniesie:

$$P_b=\pi\cdot r\cdot l=15\pi$$

Prawidłowa jest odpowiedź *C*.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31–564 Kraków, al. Pokoju 29B/22–24

Zadanie 22

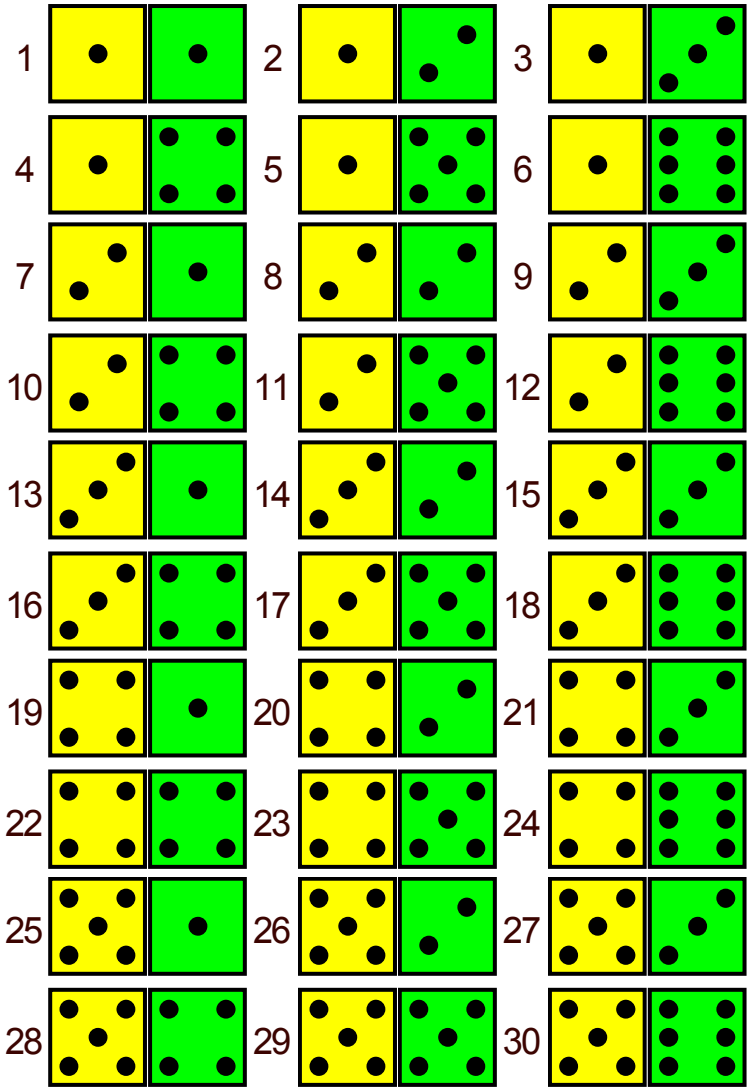
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech **p** oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 5. Wtedy:

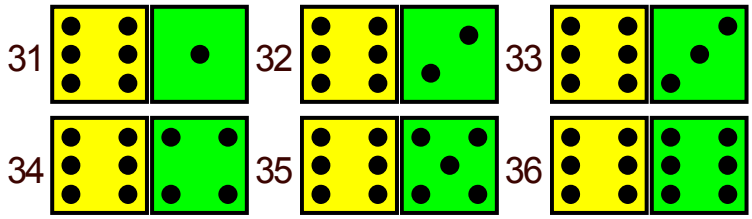
A:p= $\frac{1}{36}$, B:p= $\frac{1}{18}$, C:p= $\frac{1}{12}$, D:p= $\frac{1}{9}$

Rozwiązanie

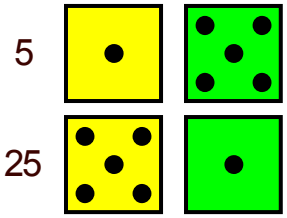
Aby obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia należy wyznaczyć liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu i podzielić ją przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych .

Przy dwukrotnym rzucie kostką liczba wszystkich zdarzeń wynosi 36. Oto te zdarzenia :





W rozpatrywanym zdarzeniu **Z** iloczyn wyrzuconych oczek ma być równy 5. Zatem zdarzeniu temu sprzyjają tylko dwa zdarzenia elementarne . Są pokazane poniżej :



Zatem prawdopodobieństwo **p** zdarzenia **Z** wyrazi się wzorem :

$$p=\frac{\#Z}{\#\Omega}$$

gdzie

$\#Z$ – liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu **Z**,

$\#\Omega$ – liczba wszystkich zdarzeń elementarnych .

Prawdopodobieństwo zdarzeni **Z** będzie mieć wartość :

$$p=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

Prawidłowa jest odpowiedź *B*.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31 – 564 Kraków ,al.Pokoju 29 B/22 – 24

Zadanie 23

Liczba $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ jest równa:

A: $2\sqrt{2}$
B: 2
C: 4
D: $\sqrt{10}-\sqrt{6}$

Rozwiązanie

Do rozwiązania tego zadania wystarczy jedna zależność dotycząca pierwiastkowania . Wzór ten pokazany jest poniżej .

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

Należy odpowiednio przedstawić liczby pod pierwiastkami w liczniku i po skorzystaniu z podanego wzoru wszystkie elementy w wyrażeniu będą mieć wspólny czynnik $\sqrt{2}$, który po uprzednim wyłączeniu przed nawias w liczniku może zostać uproszczony .

Postępując zgodnie z podaną powyżej wskazówką, należy wyłączyć czynniki przed znaki pierwiastków

$$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$$

Zatem wyrażenie przyjmie postać

$$\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$$

Prawidłowa jest odpowiedź *B*.

Zadanie 24

Mediana uporządkowanego, niemalejącego
zestawu sześciu liczb: **1**,**2**,**3**,**x**,**5**,**8** jest równa **4**. Wtedy:
A:x=2, B:x=3, C:x=4, D:x=5

Rozwiązanie

Mediana określonego zbioru danych wyznaczana jest po uporządkowaniu tych danych w kolejności niemalejącej i jest równa wartości środkowej tak ustawionych liczb, jeśli liczba elementów zbioru jest nieparzysta lub średniej arytmetycznej elementów środkowych, jeżeli liczba elementów jest parzysta.

Liczba elementów podanego zbioru wynosi: 6

Jest to liczba parzysta więc mediana **m** podanego zbioru danych będzie średnią arytmetyczną wyrazów środkowych.

$$m=\frac{3+x}{2}$$

Zbiór uporządkowany ma sześć elementów, a elementy środkowe mają wartości **3** oraz **x**.
Zatem wartość **x** wyznaczyć należy z równania:

$$\frac{3+x}{2}=4$$

czyli

$$x=5$$

Prawidłowa jest odpowiedź *D*.

Zadanie 25

Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości **7** jest równa **28** $\sqrt{3}$. Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa:
A:2, B:4, C:8, D:16

Rozwiązanie

Graniastosłup prawidłowy trójkątny jest graniastosłupem, którego podstawą jest trójkąt równoboczny.

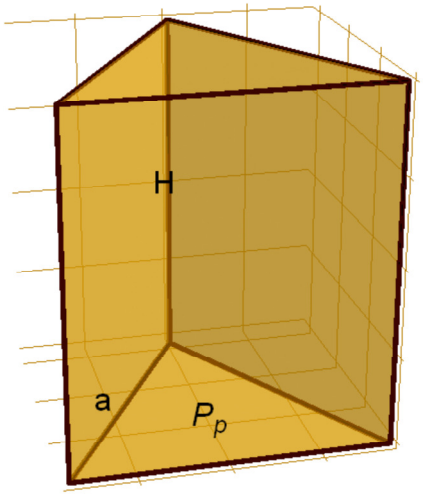
Jeżeli znana jest objętość graniastosłupa i jego wysokość, to łatwo można policzyć pole jego podstawy. Po wyznaczeniu pola podstawy należy wyliczyć długość boku trójkąta równobocznego.

Jeżeli **V** oznacza objętość graniastosłupa, $\boldsymbol{P_p}$ pole jego podstawy, a **H** wysokość, to wzór na objętość ma postać:

$$V=P_p \cdot H$$

Jeżeli podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości **a**, to pole takiego trójkąta wyraża się wzorem:

$$P_p=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Z danych zadania wynika, że:

$$V=28\sqrt{3}$$

$$H=7$$

czyli pole podstawy $\boldsymbol{P_p}$ będzie mieć wartość:

$$P_P=\frac{V}{H}$$

$$P_P=\frac{28\sqrt{3}}{7}=4\sqrt{3}$$

Bok podstawy wyliczymy z równania :

$$4\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Po jego rozwiązaniu otrzymamy, mnożąc obie strony równania przez 4 i dzieląc przez $\sqrt{3}$:

$$a^2=16$$

Odrzucając rozwiązanie ujemne otrzymamy długość boku podstawy :

$$a=4$$

Prawidłowa jest odpowiedź *B*.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31 – 564 Kraków ,al.Pokoju 29 B/22 – 24

Zadanie 26. (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^3+2x^2-8x-16=0$.

Zadanie 27. (2 pkt)

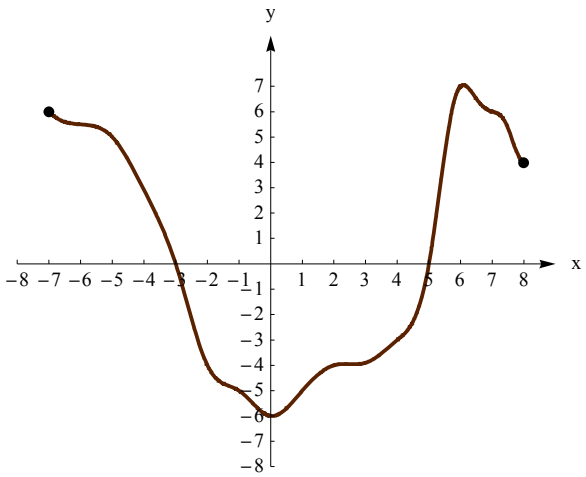
Kąt α jest ostry i $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha$.

Zadanie 28. (2 pkt)

Udowodnij , że dla dowolnych liczb rzeczywistych **x**,
y, **z** takich, że $\boldsymbol{x+y+z=0}$, prawdziwa jest nierówność $xy+yz+zx\leq 0$.
Możesz skorzystać z tożsamości $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.

Zadanie 29. (2 pkt)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f(x) określonej dla $x\in\langle -7,8\rangle$.



Odczytaj z wykresu i zapisz:
a) największą wartość funkcji f
b) zbiór rozwiązań nierówności $f(x)<0$.

Zadanie 30. (2 pkt)

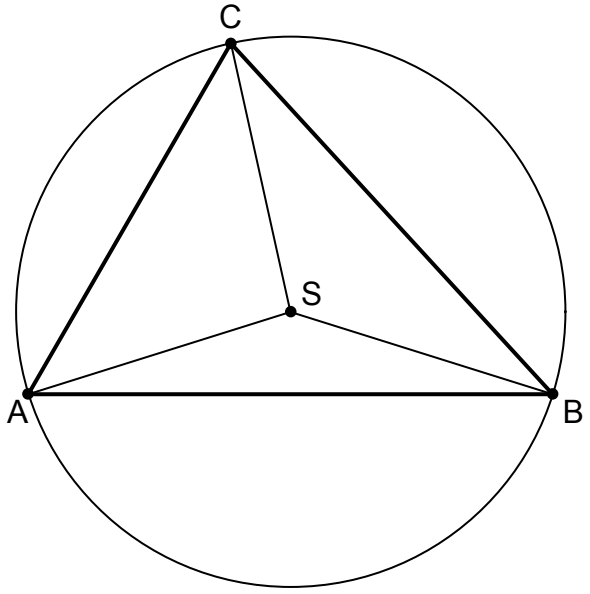
Rozwiązać nierówność $2x^2-7x+5\geq 0$.

Zadanie 31. (2 pkt)

Wykaż, że liczba $6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

Zadanie 32. (4 pkt)

Punkt **S** jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS, a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS. Oblicz kąty trójkąta ABC.



Zadanie 33. (4 pkt)

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 34. (5 pkt)

Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31 – 564 Kraków, al. Pokoju 29 B/22 – 24

Zadanie 26

Rozwiąż równanie $x^3+2x^2-8x-16=0$.

Analiza zadania

W celu rozwiązania tego równania należy jego lewą stronę rozłożyć na czynniki.

Bezpośredni rozkład na czynniki

W tym przypadkach można zastosować metodę bezpośredniego rozkładu wielomianu na czynniki. Wystarczy wyciągnąć przed nawias odpowiednie wartości z dwóch pierwszych i dwóch ostatnich wyrazów wielomianu .

Jeżeli z pierwszych dwóch składników wyciągnąć przed nawias czynnik $\boldsymbol{x^2}$, a z pozostałych dwóch $\boldsymbol{-8}$, to równanie przybierze postać:

$$x^2(x+2)-8(x+2)=0$$

W otrzymanej różnicy wyrażeń występuje wspólny czynnik, który należy wyciągnąć przed nawias. Wyrażenie przyjmie postać:

$$(x+2)(x^2-8)=0$$

Jeśli potraktować wyrażenie w drugim nawiasie jako różnicę kwadratów , to możemy ostatecznie zapisać:

$$(x+2)(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})=0$$

Otrzymany iloczyn będzie równy zero, gdy:

$$x+2=0$$

lub

$$x-\sqrt{8}=0$$

lub

$$x+\sqrt{8}=0$$

Czyli rozwiązaniem równania będą liczby $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$(pamiętaj , że zamiast $\sqrt{8}$ możesz wpisać $2\sqrt{2}$):

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania są liczby:

Uwaga ! Zachowaj uporządkowanie $x_1<x_2<x_3$.

$$x_1=-2\sqrt{2}$$

$$x_2=-2$$

$$x_3=2\sqrt{2}$$

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31 – 564 Kraków ,al.Pokoju 29 B/22 – 24

Zadanie 27

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha$.

Założenia

Dany jest kąt α, który jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Analiza zadania

Do określenia wartości podanego wyrażenia brakuje wartości funkcji **cos** dla kąta α. Aby wyliczyć wartość **cos**α wykorzystać należy zależność, zwaną jedynką trygonometryczną, czyli:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

stąd po przekształceniu otrzymamy zależność

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

W wyrażeniu, którego wartość jest poszukiwana, występuje kwadrat funkcji **cos** α, który ma wartość:

$$\cos^2\alpha=1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Wartość podanego wyrażenia obliczymy podstawiając w miejsce **sin** α i **cos**^{2} α odpowiednie wartości:

$$\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0$$

czyli ostatecznie:

$$\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha=0$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia $\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha$ jest równa 0, gdy wartość funkcji **sin** ostrego kąta α wynosi $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 28

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych **x**, **y**, **z** takich, że $x + y + z = 0$, prawdziwa jest nierówność $xy+yz+zx \leq 0$.

Możesz skorzystać z tożsamości $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.

Analiza zadania

W zadaniu należy udowodnić twierdzenie następującej treści.

Założenie :

Liczby **x**, **y** i **z** są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x + y + z = 0$.

Teza :

Prawdziwa jest nierówność : $xy + yz + zx \leq 0$

Dowód :

Aby udowodnić tezę tego twierdzenia skorzystamy ze wskazówki, która podaje zależność na kwadrat sumy trzech dowolnych liczb.

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

Z założenia wiemy, że $x + y + z = 0$, zatem kwadrat tej sumy też musi być równy zero, czyli

$$(x+y+z)^2=0$$

Zatem możemy do zera przyrównać prawą stronę wzoru na kwadrat trzech liczb:

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=0$$

która po wyciągnięciu liczby 2 przed nawias przyjmie postać:

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=0$$

ale suma kwadratów trzech liczb $x^2 + y^2 + z^2$ jest zawsze ≥ 0. W takim razie bazując na wzorze powyżej, podwojona wartość wyrażenia w nawiasie musi być mniejsza lub równa zero.

$$2(xy+xz+yz)\leq 0$$

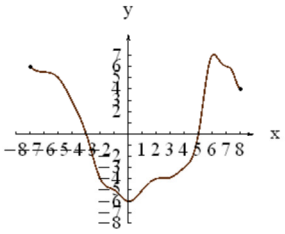
Po podzieleniu każdej strony tej nierówności przez **2** otrzymamy:

$$xy+yz+zx\leq 0$$

Co **n**ależało **d**owieść.

Zadanie 29

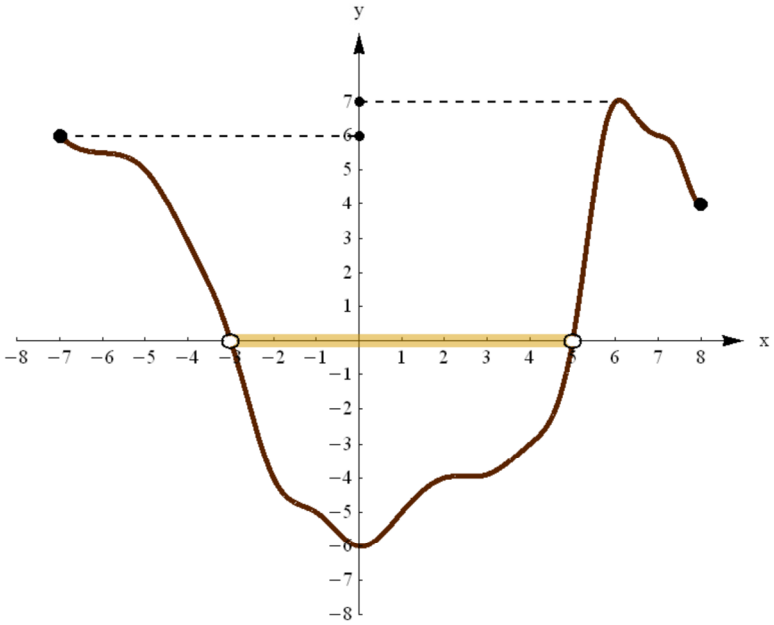
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f(x) określonej dla $x \in \langle -7,8 \rangle$.



Odczytaj z wykresu i zapisz:
a) największą wartość funkcji f
b) zbiór rozwiązań nierówności $f(x)<0$.

Analiza zadania

Funkcja dana jest w formie wykresu:



Część a): największa wartość funkcji f

Z rysunku widać, że funkcja f(x) jest funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $\langle -7,8 \rangle$. Wartością największą będzie zatem wartość lokalnego maksimum lub wartość w końcu przedziału określoności funkcji.

$f(-7)=6$

$f(8)=4$

Funkcja ma lokalne maksimum w punkcie

$x_0=6$

Jego wartość wynosi

$f(x_0)=7$

Wartością największą funkcji f_{max} w przedziale
określoności będzie największa z tych trzech liczb. Wartość f_{max} wynosi:

$f_{max}=7$

Odpowiedź:

Wartość największa funkcji **f** wynosi 7.

Część b): zbiór rozwiązań nierówności $f(x)<0$

Jeżeli wartość funkcji $f(x)$ jest mniejsza od zera, to jej wykres leży poniżej
osi **x**. Szukamy zatem przedziału , w którym wyres leży poniżej tej osi. Funkcja
ma dwa miejsca zerowe, które są początkiem i końcem szukanego przedzału .

Początek przedziału: $x_1=-3$

Koniec przedziału: $x_2=5$

Zbiór rozwiązań: $(-3,5)$

Ostatecznie zbiorem rozwiązań nierówności $f(x)<0$ jest zbiór liczb rzeczywistych x takich, że:

$x\in(-3,5)$

Odpowiedź:

Funkcja **f** przyjmuje wartości ujemne w przedziale $(-3,5)$.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31-564 Kraków ,al.Pokoju 29B/22-24

Zadanie 30

Rozwiązać nierówność $2x^2-7x+5\geq 0$.

Analiza zadania

Należy rozwiązać nierówność kwadratową . Współczynniki trójmianu kwadratowego mają wartości:

$a=2$

$b=-7$

$c=5$

Rozwiązanie

Musimy znaleźć miejsca zerowe funkcji kwadratowej , aby na podstawie położenia wykresu tej funkcji podać rozwiązanie w formie przedziałów na osi liczbowej . Musimy obliczyć wyróżnik Δ oraz miejsca zerowe x_1 i x_2.

Wyróżnik obliczymy posługując się wzorem:

$$\Delta=b^2-4ac$$

Do wyznaczenia pierwiastków posłużą nam wzory:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Wartości tych parametrów są następujące :

$$\Delta=9$$

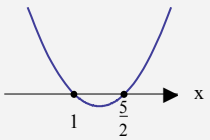
Uwaga ! Zachowaj uporządkowanie $x_1<x_2$.

$$x_1=1$$

$$x_2=\frac{5}{2}$$

Aby podać przedział spełniający warunki zadania należy wykonać wykres i sprawdzić , gdzie wartości trójmianu są większe lub równe 0.

Wykres:



Z wykresu odczytamy rozwiązanie :

Rozwiązanie: $(-\infty,1\rangle\cup\langle\frac{5}{2},\infty)$

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31 – 564 Kraków ,al.Pokoju 29 B/22 – 24

Zadanie 31

Wykaż, że liczba $6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

Analiza zadania

W zadaniu należy udowodnić twierdzenie następującej treści.

Założenie :

Liczba **n** ma wartość $6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}$.

Teza :

Liczba **n** jest podzielna przez 17.

Dowód :

Aby udowodnić podzielność liczby **n** przez 17 dokonamy jej przekształceń celem zapisu w formie iloczynu czynników. Pozostawimy liczbę 6^{98}, a pozostałe potęgi liczby 6 przekształcimy, tak aby występował w nich czynnik 6^{98}.

Liczbę 6^{100} zapiszemy jako:

$$6^{100}=6^2\cdot 6^{98}=36\cdot 6^{98}$$

Liczbę 6^{99} zapiszemy jako:

$$6^{99}=6\cdot 6^{98}$$

Wyrażenie pierwotne przyjmie postać:

$$6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}=36\cdot 6^{98}-2\cdot 6\cdot 6^{98}+10\cdot 6^{98}$$

Po wyciągnięciu przed nawias wspólnego czynnika, którym jest 6^{98} otrzymamy:

$$6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}=(36-2\cdot 6+10)\cdot 6^{98}$$

czyli po dokonaniu obliczeń w nawiasie

$$6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}=34\cdot 6^{98}$$

a ostatecznie

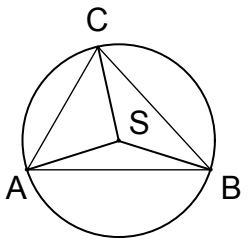
$$6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}=2\cdot 17\cdot 6^{98}$$

Z ostatniego zapisu wynika, że liczba $6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

Co **n**ależało **d**owieść.

Zadanie 32

Punkt **S** jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS, a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS. Oblicz kąty trójkąta ABC.



Analiza zadania

Na ostrokątnym trójkącie ABC opisany jest okrąg, którego środek jest w punkcie S.
Wprowadźmy oznaczenie :

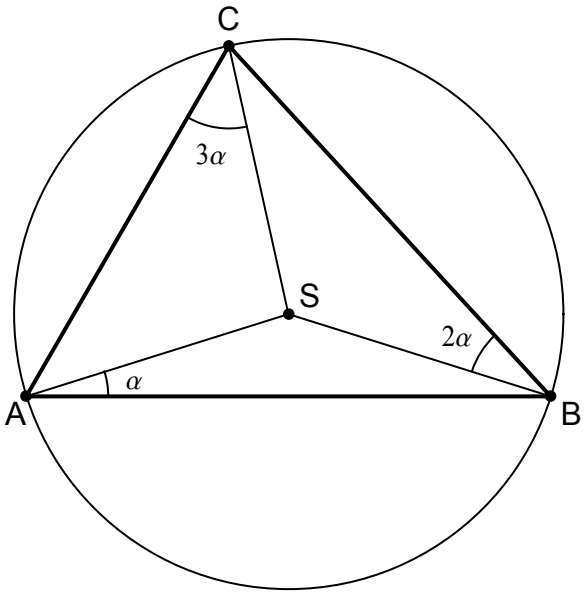
$\measuredangle BAS=\alpha$

wtedy, jak wynika z treści zadania

$\measuredangle ACS=3\alpha$

$\measuredangle CBS=2\alpha$

Kąty te zostały pokazane na rysunku poniżej .



Rozwiązanie

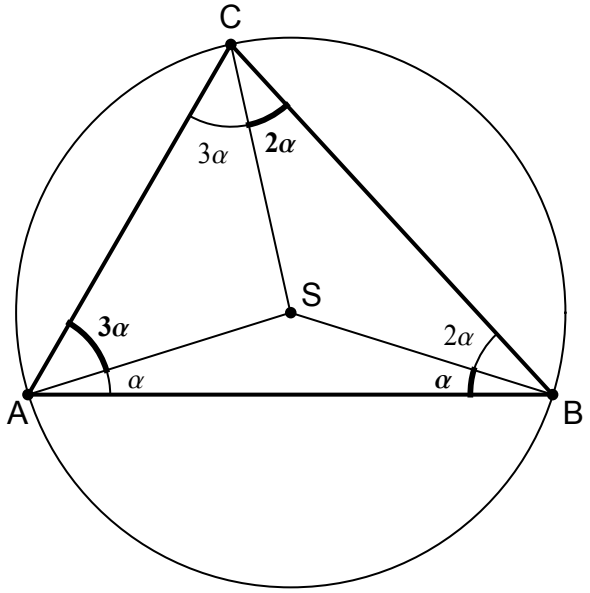
Wszystkie trzy tójkąty, które mają wierzchołek w punkcie S, czyli $\triangle ABS$, $\triangle ACS$ i $\triangle BCS$ są trójkątami równoramiennymi , gdyż ich boki przy wierzchołku S są promieniami okręgu . Zatem kąty przy podstawach tych trójkątów są równe .

$\measuredangle ABS=\alpha$

$\measuredangle BCS=2\alpha$

$\measuredangle CAS=3\alpha$

Wszystkie kąty przy wierzchołkach trójkąta ABC pokazane na rysunku poniżej.



Suma kątów w trójkącie ABC jest równa 180°, co możemy zapisać jako:

$\measuredangle BAC+\measuredangle ACB+\measuredangle CBA=180°$

ale

$\measuredangle BAC=\alpha+3\alpha=4\alpha$

$\measuredangle ACB=3\alpha+2\alpha=5\alpha$

$\measuredangle CBA=2\alpha+\alpha=3\alpha$

otrzymujemy równanie

$4\alpha+5\alpha+3\alpha=180°$

czyli

$12\alpha=180°$

Wartość miary kąta α w stopniach wyniesie:

$\alpha=15°$

Odpowiedź:

Kąty w trójkącie ABC mają następujące miary w stopniach:

$\measuredangle BAC=60°$

$\measuredangle ACB=75°$

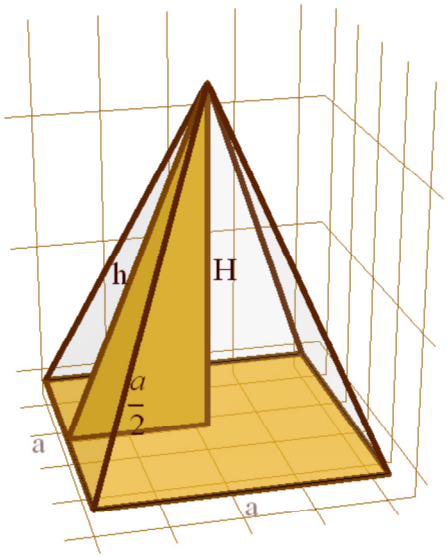
$\measuredangle CBA=45°$

Zadanie 33

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Analiza zadania

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma pole podstawy wynoszące 100 cm^2. Jego podstawą jest kwadrat o boku **a**.
Powierzchnię boczną ostrosłupa stanowią cztery trójkąty o boku podstawy **a** i wysokości **h**. **H** jest wysokością ostrosłupa.
Parametry ostrosłupa pokazuje poniższy rysunek.



Objętość ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$V=\frac{1}{3}\cdot P_p\cdot H$$

gdzie P_p jest polem podstawy.

$$P_p=100cm^2$$

ale

$$P_p=a^2$$

czyli długość boku **a** wynosi

$$a=10cm$$

Wysokość **H** wyznaczymy z trójkąta prostokątnego pokazanego na rysunku. Przyprostokątne to wysokość ostrosłupa **H** oraz połowa długości boku podstawy **a**. Przeciwprostokątna stanowi wysokość ściany bocznej **h**.

Jeżeli przez P_b oznaczymy pole powierzchni bocznej, to prawdziwy jest wzór:

$$P_b=4\cdot(\frac{1}{2}\cdot a\cdot h)=2\cdot a\cdot h$$

Pole powierzchni bocznej ma wartość:

$$P_b=260cm^2$$

Mamy wszystkie dane aby policzyć **h**.

$$h=\frac{P_b}{2\cdot a}$$

otrzymamy

$$h=13cm$$

Wysokość ostrosłupa obliczymy z twierdzenia Pitagorasa.

$$(\frac{a}{2})^2+H^2=h^2$$

z tej zależności otrzymamy

$$H=\sqrt{h^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

wartość wysokości H wyniesie

$$H=12cm$$

Teraz mamy już wszystkie wielkości niezbędne do wyliczenia objętości.
Przypomnijmy wzór na objętość:

$$V=\frac{1}{3}\cdot P_p\cdot H$$

czyli

$$V=\frac{1}{3}\cdot 100\cdot 12$$

$$V=400cm^3$$

Odpowiedź:

Objętość ostrosłupa wynosi 400 cm^3.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31–564 Kraków, al. Pokoju 29B/22–24

Zadanie 34

Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

Założenia

Jeżeli przez **x** oznaczymy prędkość pierwszego pociągu,
to z treści zadania wynika, że prędkość drugiego pociągu wynosi $x-9$.

Związek między prędkością **v**, drogą **s** i czasem **t** wyraża się zależnością:

$$v=\frac{s}{t}$$

Odległość między miastami wynosi 336 km, czyli czas t_1 jazdy pierwszego pociągu wyniesie:

$$t_1=\frac{336}{x}\text{h}$$

Czas t_2 przejazdu drugiego pociągu wyrazi się wzorem:

$$t_2=\frac{336}{x-9}\text{h}$$

Pierwszy pociąg przejechał trasę w czasie o 40 minut krótszym, czyli:

$$t_2-t_1=\frac{2}{3}\text{h}$$

Czas 40 minut zamieniony został na $\frac{2}{3}$ godziny. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{336}{x-9}-\frac{336}{x}=\frac{2}{3}$$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika lewej strony równania otrzymamy:

$$\frac{336x-336(x-9)}{x(x-9)}=\frac{2}{3}$$

Mnożąc obustronnie przez $3\cdot x(x-9)$ równanie przyjmie postać:

$$3\cdot 336x-3\cdot 336(x-9)=2\cdot x(x-9)$$

Po wymnożeniu, przeniesieniu wszystkich wyrazów na prawą stronę i zredukowaniu wyrazów podobnych otrzymamy równanie kwadratowe, którego współczynniki **a**, **b** i **c** będą mieć wartości:

$$a=2$$

$$b=-18$$

$$c=-9072$$

Dla przypomnienia poniżej podane są wzory na wyróżnik kwadratowy Δ oraz pierwiastki x_1 i x_2

$\Delta = b^2 - 4ac$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Wyróżnik trójmianu Δ ma wartość:

$\Delta = 72900$

Rozwiązania x_1 i x_2 będą mieć wartości:
Uwaga ! Zachowaj uporządkowanie $x_1 < x_2$.

$x_1 = -63$

$x_2 = 72$

Prędkość pociągu jest wielkością większą od
zera, wartość ujemna musi być odrzucona . Otrzymujemy zatem:

Prędkość $v_1 = 72$km/h

Prędkość v_2 jest mniejsza od v_1 o 9 km/h, więc:

Prędkość $v_2 = 63$km/h

Odpowiedź:

Średnia prędkość pociągu pierwszego wynosi 72 km/h, a drugiego 63 km/h.

©Gambit **www.matematykawszkole.com.pl** 31 – 564 Kraków ,al.Pokoju 29 B/22 – 24